

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

5-дәріс. Гурса есебі (сипаттауыш есеп).

Дәрістің мақсаты – Дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін қойылған Гурса есебін сипаттауыштар әдісі арқылы шешу

Негізгі сұрақтар:

1. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін қойылған Гурса есебінің қойылымы
2. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін қойылған Гурса есебін сипаттауыштар әдісі бойынша шешу

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін Гурса есебі.

Сипаттауыштар әдісі

1. Кіріспе

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (ДТДТ) — физика мен инженерияда жиі кездесетін математикалық модельдер. Гурса есебі — бір өлшемді немесе бірнеше өлшемді ДТДТ үшін бастапқы шекаралық есеп. Бұл дәрісте біз **сипаттауыштар әдісін** қолдану арқылы Гурса есебін шешуді қарастырамыз.

Гурса есебі

(3.1.1) теңдеу гиперболалық типті теңдеу болғандықтан, алдыңғы бөлімдерде көрсетілгендей оны

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \quad (3.1.3)$$

түрге (канондық түрге) келтіруге болады. Бұл (3.1.3)–теңдеудің сипаттауыш теңдеуі

$$dx \cdot dy = 0$$

болғандықтан, оның сипаттаушылары координат осьтеріне параллель болатын

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}$$

түзулері болады.

Гурса есебінің қойылымы. Ω облысында (3.1.3) теңдеудің $x = x_0$, $y = y_0$ сипаттаушыларының бойында

$$\begin{cases} u(x, y_0) = \varphi(x), & a \leq x \leq b, \\ u(x_0, y) = \psi(y), & c \leq y \leq d, \\ u(x_0, y_0) = \varphi(x_0) = \psi(y_0) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

шарттарын қанағаттандыратын $u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ функциясын анықтау керек. Мұнда

$$a(x, y), b(x, y), c(x, y), f(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{және} \quad \Omega = [x_0, a] \times [y_0, b].$$

Теорема 3.1.2. Егер (3.1.3) теңдеудің коэффициенттері және $\varphi(x)$, $\psi(y)$ функциялары жеткілікті тегіс және $u(x_0, y_0)$ шартын орындаса, (3.1.3)–(3.1.4) Гурса есебінің шешімі бар және жалғыз болады.

1 Гурса есебі: жалпы сипаттама

Бірінші ретті ДТДТ:

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = c(x, t, u), \quad (x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

мұндағы $u(x, t)$ — белгісіз функция.

Гурса есебі бір қисық бойындағы бастапқы шартпен беріледі:

$$u|_{\Gamma} = \phi(s), \quad \Gamma : x = x_0(s), \quad t = t_0(s), \quad s \in I,$$

мұндағы Γ — бастапқы қисық, $\phi(s)$ — берілген функция. Мақсат: $u(x, t)$ -ті Ω аймағында табу.

2 Сипаттауыштар әдісі

Сипаттауыштар әдісі — бірінші ретті ДТДТ шешудің классикалық тәсілі. Идея: теңдеуді қарапайым ЖДТ-ге айналдыру үшін қисықтар бойымен өту.

2.1 Сипаттауыштар анықтамасы

Берілген теңдеуді жазамыз:

$$a(x, t)u_x + b(x, t)u_t = c(x, t, u).$$

Сипаттауыштар қисықтары $(x(s), t(s))$, s — параметр, келесі жүйемен анықталады:

$$\frac{dx}{ds} = a(x, t), \quad \frac{dt}{ds} = b(x, t), \quad \frac{du}{ds} = c(x, t, u).$$

Бастапқы шарттар:

$$x(0) = x_0(s), \quad t(0) = t_0(s), \quad u(0) = \phi(s).$$

2.2 Жалпы шешім қадамдары

1. Сипаттауыштар жүйесін құру: $\frac{dx}{ds} = a(x, t)$, $\frac{dt}{ds} = b(x, t)$, $\frac{du}{ds} = c(x, t, u)$.
2. Сипаттауыштарды интегралдау арқылы $x(s)$ және $t(s)$ функцияларын табу.
3. $u(s)$ -ті интегралдау: $\frac{du}{ds} = c(x(s), t(s), u(s))$.
4. Шешімді кері ауыстыру: $s \mapsto (x, t)$ арқылы $u(x, t)$ табу.

3 Мысал: тұрақты коэффициенттер жағдайы

Теңдеу:

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const}, \quad x > 0, t > 0,$$

бастапқы шарт: $u(x, 0) = \phi(x)$.

3.1 Сипаттауыштар

Сипаттауыштар теңдеуі:

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + at.$$

Сипаттауыш бойындағы u :

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \text{const}.$$

3.2 Шешім

Бастапқы шартқа сәйкес:

$$u(x, t) = \phi(x - at).$$

4 5. Қорытынды

- Сипаттауыштар әдісі — бірінші ретті ДТДТ және Гурса есебі үшін негізгі аналитикалық әдіс;
- Бастапқы қисық бойында теңдеуді қарапайым ОДЖ-ға айналдыру арқылы шешу мүмкіндігі;
- Мысалда көрсетілгендей, тұрақты коэффициенттер үшін шешім $u(x, t) = \phi(x - at)$ түрінде оңай табылады.

Мысал. Гурса есебін шешіңіз:

$$2u_{xy} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad y > |x|, \quad u|_{y=x} = 1, \quad u|_{y=-x} = (x+1)e^x.$$

Шешуі. Теңдеуді канондық түрге келтірейік. Сипаттаушы теңдеуі

$$2(dy)^2 - 2(dx)^2 = 0$$

болғандықтан

$$dy = \pm dx \Rightarrow y = x + c_1, \quad y = -x + c_2.$$

Олай болса,

$$\xi = y - x, \quad \eta = y + x$$

белгілеуін енгізіп, теңдеуді жаңа айнымалылар бойынша жазсақ

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{4}u_{\xi} = 0$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің жалпы шешімі

$$u(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{4}\eta} \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Демек, берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$u(x, y) = e^{\frac{1}{4}(y-x)} \varphi(y+x) + \psi(y-x). \quad (3.1.5)$$

Бұған есептің берілген шарттарын қолданайық. φ және ψ функцияларын анықтаймыз:

$$\begin{cases} u(x, y) = \varphi(2x) + \psi(0) = 1, \\ u(x, -x) = e^{\frac{1}{2}x} \varphi(0) + \psi(-2x) = (x+1)e^x. \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден

$$\varphi(2x) = 1 - \psi(0) \quad (3.1.6)$$

немесе

$$\varphi(x) = 1 - \psi(0).$$

Екінші теңдеуден

$$\psi(-2x) = (x+1)e^x - e^{-\frac{x}{2}} \varphi(0).$$

Бұған (3.1.6) теңдігін қолдансақ

$$\psi(-2x) = (x+1)e^x - e^{-\frac{x}{2}}(1 - \psi(0)),$$

немесе

$$\psi(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{4}} - e^{\frac{x}{4}}(1 - \psi(0)). \quad (3.1.7)$$

теңдеуін аламыз. Бұл (3.1.6) және (3.1.7) функцияларды (3.1.5)-ке қойып, Гурса есебінің шешімін табамыз:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{\frac{1}{4}(y-x)} \varphi(y+x) + \psi(y-x) \\ &= e^{\frac{1}{4}(y-x)} [1 - \psi(0)] + \left(1 - \frac{y-x}{2}\right) e^{-\frac{1}{4}(y-x)} - e^{\frac{1}{4}(y-x)}(1 - \psi(0)). \end{aligned}$$

Осыдан

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(2+x-y) e^{\frac{x-y}{2}}.$$

Жауабы:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(2+x-y) e^{\frac{x-y}{2}}.$$

5 Әдебиеттер тізімі

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.

Список литературы

- [1] Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж. 5
- [2] Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968. 5
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1984. 5
- [4] Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж. 5
- [5] Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің септері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж. 5
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2006. 5
- [7] Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б. 5